Binomna formula

1. Izračunati $\binom{8}{5}$

Rešenje:

$$\binom{8}{5}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=56$$

Takođe je:

$$\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!\cdot(8-5)!}=56$$

2. Pokazati da je $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}=\binom{6}{4}$

Rešenje:

Koristeći formulu $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ dolazimo do rešenja.

U ovom slučaju $n=5,\ k=3$ pa je $\binom{5}{3}+\binom{5}{3+1}=\binom{5+1}{3+1}=\binom{6}{4}$

3. Razviti po binomnoj formuli $(x+2)^5$.

Rešenje:

Koristimo $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$

$$(x+2)^5=\binom{5}{0}\cdot x^5\cdot 2^0+\binom{5}{1}\cdot x^4\cdot 2^1+\binom{5}{2}\cdot x^3\cdot 2^2+\binom{5}{3}\cdot x^2\cdot 2^3+\binom{5}{4}\cdot x^1\cdot 2^4+\binom{5}{5}\cdot x^0\cdot 2^5=$$

$$=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$$

4. Razviti po binomnoj formuli $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$.

Rešenje:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6=x^6-6x^4+15x^2-20+15\cdot\frac{1}{x^2}-6\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}$$

5. Odrediti peti član razvoja stepena binoma $\left(2x-\frac{3}{x^2}\right)^9$ po binomnoj formuli.

Rešenje:

Opšti član binomne formule u razvijenom obliku: $T_{k+1}=\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$

U ovom slučaju je $k+1=5\Rightarrow k=4$ i $n=9$.

$$T_5=\binom{9}{4}\cdot(2x)^{9-4}\cdot\left(\frac{-3}{x^2}\right)^4=9\cdot 7\cdot 2^6\cdot 3^4\cdot\frac{1}{x^3}$$

6. Odrediti redni broj člana (k) u razvijenom obliku binoma $\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ koji sadrži činilac a^7.

Rešenje:

$n=12$

$T_{k+1}=\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$

$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-k}\cdot\left(\sqrt{a}\right)^k=a^7$ sređivanjem dobijamo da je $k=6\Rightarrow k+1=7\Rightarrow T_{k+1}=T_7$ što znači da sedmi član sadrži činilac a^7.

7. Odrediti x, ako treći član razvoja $\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{4-\sqrt[x]{4}}\right)^6$ ima vrednost 240.

Rešenje:

$T_3=240\Rightarrow k+1=3\Rightarrow k=2$ i $n=6$

Koristeći $T_{k+1}=\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$ dobijamo $x=2$.

8. Izračunati $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

Rešenje:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$$

9. Izračunati $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$

Rešenje:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=(1-1)^n=0^n=0$$