VIŠA ELEKTROTEHNIČKA ŠKOLA U BEOGRADU

NRT, I kolokvijum iz inženjerske matematike-II rok, 11.01.2003.

1. Kramerova teorema. **2.** Izračunati $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2003}$.

3. Rešiti matričnu jednačinu $XA^T - X = A$, gde je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Odrediti λ tako da homogen sistem linearnih jednačina

$$2x + 2y + 3z = 0, \quad 3x + \lambda y + 5z = 0, \quad x + 7y + 3z = 0$$

ima netrivijalna rešenja i odrediti ta rešenja.

Rešenja

2. Kako je

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i,$$

dati izraz se svodi na

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2003} = (-i)^{2003} = (-i)^{2000} \cdot (-i)^3 = -i^3 = i.$$

3. Zadata matrična jednačina se može prikazati u obliku

$$X\,(A^T - I) = A \qquad (I \text{ jedinična matrica}),$$

odakle je

$$X = A\,(A^T - I)^{-1}.$$

Imamo

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dalje je

$$(A^T - I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

pa je na kraju

$$X = A\,(A^T - I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 3/4 \\ 5/2 & -1/2 & 7/4 \\ 1/2 & 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

4. Uslov da nehomogen sistem ima netrivijalna rešenja je da determinanta matrice sistema bude jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & \lambda & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 3\lambda - 15 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 5.$$

Za $\lambda = 5$ matrica sistema je $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ i njen rang je jednak 2, što znači da je jedna jednačina datog sistema suvišna.

Neka je $z = t$. Prve dve jednačine sistema postaju

$$2x + 2y = -3t, \qquad 3x + 5y = -5t,$$

odakle dobijamo $x = -5t/4$, $y = -t/4$. Prema tome, rešenje sistema je

$$(x, y, z) = (-5t/4,\ -t/4,\ t),$$

gde je t proizvoljan broj.