VIŠA ELEKTROTEHNIČKA ŠKOLA U BEOGRADU

NRT, II kolokvijum iz inženjerske matematike 11.01.2003.

1. Izvesti Ojlerovu formulu $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

2. Naći $f'(\pi/3)$, gde je $f(x) = \ln \dfrac{2 + \operatorname{tg} x}{2 - \operatorname{tg} x}$.

3. Neka je $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
Odrediti a, b, c tako da funkcija f ima nulu za $x = 2$, a u tački $(1, -2)$ dostiže ekstremnu vrednost. Ispitati tako dobijenu funkciju i nacrtati njen grafik.

4. Naći ekstremume funkcije $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Rešenja

2. Prikažimo funkciju f u obliku $f(x) = \ln(2 + \operatorname{tg} x) - \ln(2 - \operatorname{tg} x)$. Njen izvod je

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2 + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2 - \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{2 + \operatorname{tg} x} + \frac{1}{2 - \operatorname{tg} x}\right) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \frac{4}{4 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4}{4\cos^2 x - \sin^2 x}.
\end{aligned}
$$

Za $x = \pi/3$ imamo

$$f'(\pi/3) = \frac{4}{4 \cdot (1/2)^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{4}{4 \cdot (1/4) - (3/4)} = 16.$$

3. Prema tekstu zadatka funkcija f ispunjava uslove

$$f(2) = 0, \qquad f(1) = -2, \qquad f'(1) = 0. \tag{1}$$

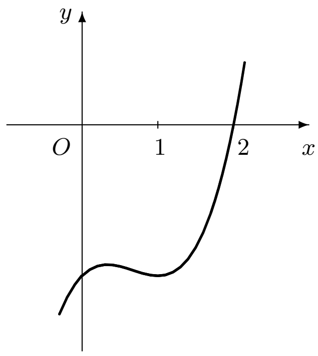
Kako je $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, uslovi (1) se svode na sistem linearnih jednačina

$$8 + 4a + 2b + c = 0, \quad 1 + a + b + c = -2, \quad 3 + 2a + b = 0,$$

čije je rešenje $a = -2$, $b = 1$, $c = -2$. Prema tome

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Jedna nula funkcije je $x = 2$. Ako polinom $x^3 - 2x^2 + x - 2$ podelimo sa $x - 2$, dobijamo $x^2 + 1$. Pošto $x^2 + 1$ nema realnih nula, jedina nula funkcije f je $x = 2$.



Prvi izvod $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ jednak je nuli za $x = 1$ ili $x = 1/3$.

Drugi izvod je $f''(x) = 6x - 4$. Prevojna tačka se dobija iz jednačine $f''(x) = 0$. Iz $6x - 4 = 0$ nalazimo $x = 2/3$. Kako je $f''(1) = 2 > 0$, za $x = 1$ imamo lokalni minimum $f_{\min} = -2$. U tački $x = 1/3$ imamo lokalni maksimum $f_{\max} = -50/27$.

4. Potrebni uslovi za egzistenciju ekstremuma su

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - y^2 + 10x = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 2y = 2y\,(1 - x) = 0.$$

Dugi uslov je zadovoljen za $y = 0$ ili $x = 1$.

1° Zamenom $y = 0$ iz prvog uslova dobijamo $6x^2 + 10x = 0$, odakle nalazimo $x = 0$ ili $x = -5/3$. Prema tome, dobili smo dve stacionarne tačke: $M_1(0, 0)$ i $M_2(-5/3, 0)$.

2° Za $x = 1$ prvi uslov postaje $y^2 = 16$. Nalazimo $y = \pm 2$, pa imamo još dve stacionarne tačke: $M_3(1, 4)$ i $M_4(1, -4)$.

Parcijalni izvodi drugog reda su

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2y, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x + 2.$$

Priroda stacionarnih tačaka:

$M_1(0, 0):\ A = 10,\ B = 0,\ C = 2,\ AC - B^2 = 20 > 0$. Minimum $z_{\min} = 0$.

$M_2(-5/3, 0):\ A = -10,\ B = 0,\ C = 16/3,\ AC - B^2 < 0$. Sedlasta tačka.

$M_3(1, 4):\ A = 22,\ B = -8,\ C = 0,\ AC - B^2 < 0$. Sedlasta tačka.

$M_4(1, -4):\ A = 22,\ B = 8,\ C = 0,\ AC - B^2 < 0$. Sedlasta tačka.